

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS/EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
 MATHEMATICAL PHYS/PHYSIQUE MATHEMATIQUE

Problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler-Poisson-Darboux

Cheikh Ould Mohamed El-hafedh et Mohamed Vall Ould Moustapha

Cauchy problems with the modified conditions for the Euler-Poisson-Darboux equations

Abstract. Nowadays the Euler-Poisson-Darboux equation is extensively studied in several settings. The main questions on every spaces are explicit solutions for the classical Cauchy problems with the second data null. In this note we will generalize and unify several results on Euler-Poisson-Darboux equation. We consider the Cauchy problems with modified conditions for the classical and radial Euler-Poisson-Darboux equations. We give the explicit solutions in terms of the Gauss ${}_2F_1$ and Appell F_4 hypergeometric functions. The main results have many applications such as the classical and radial wave equation as well as the Tricomi operator [1].

1. INTRODUCTION. On considère la famille classique d'équations d'Euler-Poisson-Darboux dans R^n

$$\Delta_n U(t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t, x), \quad t > 0 \quad (E_1)$$

et la famille radiale d'équations d'Euler-Poisson-Darboux

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) U(t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t, x), \quad t > 0, x > 0 \quad (E_2)$$

avec les conditions initiales modifiées

$$U(0, x) = f(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = g(x) \quad (C_1)$$

$$U(0, x) = A_x^q f(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = A_x^q g(x) \quad (C_2)$$

où A_x^q est la $q^{\text{ième}}$ puissance de l'opérateur $A_x = \begin{cases} \Delta_n & \text{si } x \in R^n \\ \Lambda_x & \text{si } x \in R^+ \end{cases}$,

$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ et $\Lambda_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x}$, ν , μ et q sont des paramètres réels.

L'équation (E_1) a été étudiée pour les valeurs entières de k , $(1-2\mu = k)$ par A.Weinstein [9] et son école de Maryland, D.W.Bresters [3] a exprimé la solution de l'équation (E_1) avec les conditions

$$U(0, x) = f(x), \quad U_t(0, x) = g(x) \quad (C)$$

Mais il a été contraint -semble t-il- de prendre la deuxième donnée nulle ($g = 0$) à cause de la singularité en $t = 0$, les conditions modifiées (C_1) et (C_2) permettent de remédier à ce problème et de pouvoir prendre la deuxième donnée une fonction non nulle g , tout en recouvrant les conditions classiques (C) : ainsi pour $\mu = \frac{1}{2}$ on retrouve les problèmes de Cauchy pour les équations classiques et radiales des ondes (voir [4] et [2]).

(E_1) et (E_2) sont des équations des ondes avec potentiels dépendants du temps respectivement: $-\frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{1-2\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t}$.

L'intérêt des équations (E_1) et (E_2) vient du fait que les potentiels correspondants sont homogènes de degré -2 et donc les opérateurs de gauche et droite se comportent de la même manière. L'une des difficultés majeures dans le cas du potentiel dépendant du temps est l'absence de relation entre les semi-groupes engendrés par l'équation de Schrodinger et les propriétés spectrales de l'opérateur $H = -\Delta + V$. Rappelons que pour un potentiel indépendant du temps V on a $g(H) = \int g(\lambda) dE(\lambda) f$ où $dE(\lambda)$ est la mesure spectrale associée à l'opérateur H ; ce qui n'est pas valable dans le cas d'un potentiel dépendant du temps. Les résultats principaux de cet article sont les suivants:

THÉORÈME 1. Pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$, le problème de Cauchy (E_1) , (C_1) admet la solution unique donnée par:

$$U(t, x) = \alpha_{n, -\mu} t^{2\mu} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|x'-x| < t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{-\mu - \frac{1}{2}} dx' \\ + \frac{1}{2\mu} \alpha_{n, \mu} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|x'-x| < t} g(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\mu - \frac{1}{2}} dx' \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$U(t, x) = \beta_n t^{2\mu} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{|x'-x| < t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{-\mu} dx' \\ + \frac{1}{2\mu} \beta_n \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{|x'-x| < t} g(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\mu} dx' \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\text{avec } \alpha_{n, \mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} + \mu)} \text{ et } \beta_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

THÉORÈME 2. Pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$ et $-\frac{n}{2} < q < -\frac{\mu}{2} - \frac{n}{4}$, le problème de Cauchy (E_1) , (C_2) admet la solution unique donnée par:

$$U(t, x) = \int_{R^n} f(x') N_{-\mu}(t, x, x') dx' + \frac{t^{2\mu}}{2\mu} \int_{R^n} g(x') N_{\mu}(t, x, x') dx'$$

$$\text{où } N_{\mu}(t, x, x') = \begin{cases} \frac{2^{2q+\frac{n}{2}} 1^{2q} \Gamma(q+\frac{n}{2})}{(2\pi)^n \Gamma(-q)} |x - x'|^{-2q-n} {}_2F_1(q + \frac{n}{2}, q + 1, \mu + 1, \frac{t^2}{|x-x'|^2}) \text{ si } 0 < t < |x - x'| \\ \frac{2^{2q+\frac{n}{2}} 1^{2q} \Gamma(1+\mu) \Gamma(q+\frac{n}{2})}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(1+\mu-q-\frac{n}{2})} t^{-2q-n} {}_2F_1(q + \frac{n}{2}, q + \frac{n}{2} - \mu, \frac{n}{2}, \frac{|x-x'|^2}{t^2}) \text{ si } |x - x'| < t \end{cases}$$

avec ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$ la fonction hypergéométrique de Gauss

et $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ le symbole de Pochhammer.

THÉORÈME 3. Pour $\nu > -\frac{1}{2}$ et $0 < \mu < \frac{1}{2}$, le problème de Cauchy (E_2) , (C_1) admet la solution unique donnée par:

$$U(t, x) = \int_0^{+\infty} f(x') t^{2\mu} K_{-\mu}(t, x, x') x'^{1-2\nu} dx' + \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} g(x') K_{\mu}(t, x, x') x'^{1-2\nu} dx'$$

où $K_\mu(t, x, x') =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } 0 < x' < x - t \text{ ou } x' > x + t, \\ \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(1+\mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}+\mu)} (xx')^{\nu+\mu-1} (1-z)^{\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}+\mu, \frac{1-z}{2}) & \text{pour } |x-t| < x' < x+t, \\ \frac{2^{\mu-\nu} \Gamma(1+\mu) \Gamma(1-\mu+\nu) \sin[(\mu-\nu)\pi]}{\pi \Gamma(\nu+1)} (xx')^{\nu+\mu-1} z^{\mu-\nu-1} & \text{avec } z = \frac{x^2+x'^2-t^2}{2xx'}, \\ \times {}_2F_1(\frac{\nu-\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1, \nu+1, \frac{1}{z^2}) & \text{pour } 0 < x' < t-x \end{array} \right.$$

THÉOREME 3 bis. Pour $0 < \mu < 1$ et les données initiales analytiques $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$ et $g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l$, le problème (E_2) , (C_1) admet la solution unique donnée par:

$$U(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l U_l + \sum_{l=0}^{\infty} b_l V_l$$

où $U_l = x^l {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu - \frac{l}{2}, 1 - \mu, \frac{t^2}{x^2})$ et $V_l = \frac{t^{2\mu}}{2\mu} x^l {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu - \frac{l}{2}, 1 + \mu, \frac{t^2}{x^2})$.

THÉOREME 4. Pour $\nu > -\frac{1}{2}$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < q < -\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}$, le problème de Cauchy (E_2) , (C_2) admet la solution unique donnée par:

$$U(t, x) = K(\nu, q) \int_0^{+\infty} f(x') H_{-\mu}(t, x, x') x'^{1-2\nu} dx' + \frac{K(\nu, q) t^{2\mu}}{2\mu} \int_0^{+\infty} g(x') H_{\mu}(t, x, x') x'^{1-2\nu} dx' \text{ avec}$$

$$H_{\mu}(t, x, x') = x^{2\nu} x'^{-2(q+1)} F_4(q+1, q+1+\nu, 1+\mu, 1+\nu, \frac{t^2}{x'^2}, \frac{x^2}{x'^2}),$$

$$K(\nu, q) = \frac{2^{2q+1} 1^{2q} \Gamma(q+1+\nu)}{\Gamma(1+\nu) \Gamma(-q)}$$

et F_4 la fonction hypergéométrique de deux variables d'Appell définie par[8]:

$$F_4(a, b, c, d, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m (d)_n m! n!} x^m y^n.$$

2. PRÉLIMINAIRES.

Rappelons l'équation de Bessel [6] P106

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\alpha}{x} \frac{\partial}{\partial x} + (\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{x^2}] V = 0$$

dont deux solutions indépendantes sont $t^\alpha J_\nu(\beta t^\gamma)$ et $t^\alpha Y_\nu(\beta t^\gamma)$ avec J_ν et Y_ν des fonctions de Bessel du premier espèce. On définit la transformation de Fourier-Bessel-Hankel d'une fonction f par:

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) (\lambda x)^\nu J_\nu(\lambda x) x^{1-2\nu} dx.$$

Dans la suite, on aura besoin des lemmes suivants:

Lemme 1. ([6] P 134 – 135) Pour $\mu > 0$ on a les comportements asymptotiques

i $J_\mu(Z) \approx \frac{Z^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}$ et $Y_\mu(Z) \approx \frac{-2^\mu \Gamma(\mu)}{\pi Z^\mu}$ en zéro,

ii $J_\mu(Z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \cos(Z - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{1}{4}\pi)$ et $Y_\mu(Z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \sin(Z - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{1}{4}\pi)$ à l'infini.

Lemme 2.

i $\widehat{\Lambda_x f}(\lambda) = -\lambda^2 \widehat{f}(\lambda)$.

ii La transformation inverse de Fourier-Bessel-Hankel est donnée par:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) (\lambda x)^\nu J_\nu(\lambda x) \lambda^{1-2\nu} d\lambda.$$

Lemme 3 ([5] P 675).

i La transformation de Fourier d'une fonction radiale est donnée par:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|\xi|) \exp(i\xi \cdot x) d\xi = |x|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} f(r) J_{\frac{n}{2}-1}(r|x|) r^{\frac{n}{2}} dr.$$

ii. $\int_0^{+\infty} r^{-\rho} J_\mu(ar) J_\nu(br) dr = \frac{2^{-\rho} a^{\rho-\nu-1} b^\nu \Gamma(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2})}{\Gamma(1+\nu) \Gamma(\frac{1-\nu+\mu+\rho}{2})}$
 $\times {}_2F_1(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}, \frac{1+\nu-\mu-\rho}{2}, \nu+1, \frac{b^2}{a^2})$ où $\nu + \mu - \rho + 1 > 0$, $\rho > -1$, $a > b > 0$.

Lemme 4 ([5] P 677).

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{2a-1-\mu} J_\mu(\lambda t) J_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda x') d\lambda = \frac{2^{2a-1-\mu} \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\nu) \Gamma(1-a)} t^\mu x^\nu x'^{-\nu-2a} \cdot F_4(a, a+\nu, 1+\mu, 1+\nu, \frac{t^2}{x'^2}, \frac{x^2}{x'^2})$$

pour $-\nu < a < \frac{5}{4} + \frac{\mu}{2}$, $x > 0$, $t > 0$ et $x' > x + t$;

et pour $-\nu < a < \frac{3}{4} + \frac{\mu}{2}$ l'intégrale converge absolument

et par suite, elle prolonge F_4 pour $0 < x' < x + t$.

Lemme 5. Pour $W_{n,\mu}(t, x, x') = C_{n,\mu} [t^2 - |x' - x|^2]^{\mu-\frac{n}{2}}$ et $C_{n,\mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1+\mu-\frac{n}{2})}$, on a

$$i \ W_{n,\mu}(t, x, x') = \begin{cases} \alpha_{n,\mu} (\frac{\partial}{t\partial t})^{\frac{n-1}{2}} [t^2 - |x' - x|^2]^{\mu-\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \beta_n (\frac{\partial}{t\partial t})^{\frac{n}{2}} [t^2 - |x' - x|^2]^\mu & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$ii \ \Delta_n W_\mu(t, x, x') = 2(\mu - \frac{n}{2}) C_{n,\mu} (t^2 - |x - x'|^2)^{\mu-\frac{n}{2}-2} [2(\mu-1) |x - x'|^2 - nt^2],$$

$$iii \ [\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t}] W_\mu(t, x, x') =$$

$$4(\mu - \frac{n}{2}) C_{n,\mu} (t^2 - |x - x'|^2)^{\mu-\frac{n}{2}-2} [(1-\mu)(t^2 - |x - x'|^2) + (\mu - \frac{n}{2} - 1)t^2],$$

Preuve. Une simple vérification suffit.

3. ÉQUATION CLASSIQUE D'EULER-POISSON-DARBOUX.

Preuve du théorème 1. D'après le lemme 5 on a

$$U(t, x) = t^{2\mu} \int_{|x'-x|<t} f(x') W_{-\mu}(t, x, x') dx' + \frac{1}{2\mu} \int_{|x'-x|<t} g(x') W_\mu(t, x, x') dx',$$

$$\text{et } (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n) W_\mu = 0,$$

soit V une solution de l'équation (E_1) , remarquons que si $V(t, x) = t^{2\mu} w_{-\mu}(t, x)$ alors

$$\Delta w_{-\mu}(t, x) = [\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1+2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t}] w_{-\mu}(t, x),$$

donc il suffit de montrer que W_μ vérifie l'équation (E_1) , ce qui est réalisé.

Pour voir les conditions initiales, on utilise les coordonnées polaires centrées en x

$x' = x + r\omega$, $\omega \in S^{n-1}$, $S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n, |\omega| = 1\}$ et le changement des variables

$r = ts$, $0 < s < 1$, on obtient

$$U(t, x) = C_{n,-\mu} \int_0^1 f_x^\#(ts) (1-s^2)^{-\mu-\frac{n}{2}} s^{n-1} ds + \frac{C_{n,\mu}}{2\mu} t^{2\mu} \int_0^1 g_x^\#(ts) (1-s^2)^{\mu-\frac{n}{2}} s^{n-1} ds$$

$$\text{avec } f_x^\#(r) = \int_{S^{n-1}} f(x + r\omega) d\sigma(\omega),$$

et $\int_{S^{n-1}} d\sigma(\omega) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

à la limite on obtient la première donnée initiale à savoir que

$$\int_0^1 (1-s^2)^{-\mu-\frac{n}{2}} s^{n-1} ds = \frac{1}{2} B(1-\mu-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) = \frac{\Gamma(1-\mu-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(1-\mu)}.$$

De même on obtient la deuxième donnée initiale.

Preuve du théorème 2. On pose $F(x) = \Delta_x^q f(x)$ et $G(x) = \Delta_x^q g(x)$, en utilisant la transformation de Fourier et les lemmes 1, 2 et quelques propriétés des fonctions J_ν et Y_ν (voir [6] et [7]) on obtient

$$\widehat{U}(t, \xi) \approx \frac{|\xi|^\mu C_1(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} t^{2\mu} - \frac{2^\mu \Gamma(\mu)}{\pi |\xi|^\mu} C_2(\xi) \Rightarrow \widehat{U}(0, \xi) = -\frac{2^\mu \Gamma(\mu) C_2(\xi)}{\pi |\xi|^\mu},$$

on obtient $C_2(\xi) = -\frac{\pi |\xi|^\mu \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu)}$, soit $Z = |\xi| t$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{U}(t, \xi) &= |\xi|^{1-\mu} C_1(\xi) Z^\mu J_{\mu-1}(Z) - \frac{\pi |\xi| \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu)} Z^\mu Y_{\mu-1}(Z) \\ &= |\xi|^{1-\mu} C_1(\xi) Z^\mu \{ \cos[(1-\mu)\pi] J_{1-\mu}(Z) - \sin[(1-\mu)\pi] Y_{1-\mu}(Z) \} \\ &\quad - \frac{\pi |\xi| \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu)} Z^\mu \{ \sin[(1-\mu)\pi] J_{1-\mu}(Z) + \cos[(1-\mu)\pi] Y_{1-\mu}(Z) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \widehat{U}(t, \xi) &\approx \frac{t}{2^{1-\mu} \Gamma(2-\mu)} \left\{ \cos[(1-\mu)\pi] |\xi|^{2-\mu} C_1(\xi) - \frac{\pi \sin[(1-\mu)\pi]}{2^\mu \Gamma(\mu)} |\xi|^2 \widehat{F}(\xi) \right\} \\ &\quad + \frac{2^{1-\mu} \Gamma(1-\mu)}{\pi} t^{2\mu-1} \left\{ \sin[(1-\mu)\pi] |\xi|^\mu C_1(\xi) + \frac{\pi \cos[(1-\mu)\pi]}{2^\mu \Gamma(\mu)} |\xi|^{2\mu} \widehat{F}(\xi) \right\}, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{U}(t, \xi) = \frac{2^{1-\mu} \Gamma(1-\mu)}{\pi} \left\{ \sin[(1-\mu)\pi] |\xi|^\mu C_1(\xi) + \frac{\pi \cos[(1-\mu)\pi]}{2^\mu \Gamma(\mu)} |\xi|^{2\mu} \widehat{F}(\xi) \right\} = \widehat{G}(\xi)$$

$$\Rightarrow C_1(\xi) = -\frac{\pi |\xi|^\mu \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \tan[(1-\mu)\pi] \Gamma(\mu)} + \frac{\pi |\xi|^{-\mu} \widehat{G}(\xi)}{2^{1-\mu} \sin[(1-\mu)\pi] \Gamma(1-\mu)}, \text{ par suite on a}$$

$$\widehat{U}(t, \xi) =$$

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{\pi |\xi|^\mu \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \tan[(1-\mu)\pi] \Gamma(\mu)} + \frac{\pi |\xi|^{-\mu} \widehat{G}(\xi)}{2^{1-\mu} \sin[(1-\mu)\pi] \Gamma(1-\mu)} \right\} t^\mu J_\mu(|\xi| t) - \frac{\pi |\xi|^\mu \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu)} t^\mu Y_\mu(|\xi| t) \\ &= \frac{\pi |\xi|^{-\mu} \widehat{G}(\xi)}{2^{1-\mu} \sin[(1-\mu)\pi] \Gamma(1-\mu)} t^\mu J_\mu(|\xi| t) - \frac{\pi |\xi|^\mu \widehat{F}(\xi)}{2^\mu \Gamma(\mu)} t^\mu \left\{ \frac{1}{\tan[(1-\mu)\pi]} J_\mu(|\xi| t) + Y_\mu(|\xi| t) \right\}, \text{ or} \\ &\frac{1}{\tan[(1-\mu)\pi]} J_\mu(|\xi| t) + Y_\mu(|\xi| t) = -\frac{J_{-\mu}(|\xi| t)}{\sin[(1-\mu)\pi]} \text{ et } \Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin[(1-\mu)\pi]}, \end{aligned}$$

alors $\widehat{U}(t, \xi) = 2^{-\mu} \Gamma(1-\mu) t^\mu |\xi|^\mu J_{-\mu}(|\xi| t) \widehat{F}(\xi) + 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) t^\mu |\xi|^{-\mu} J_\mu(|\xi| t) \widehat{G}(\xi)$, donc

$$\widehat{U}(t, \xi) = 2^{-\mu} \Gamma(1-\mu) t^\mu |\xi|^{2q+\mu} J_{-\mu}(|\xi| t) \widehat{f}(\xi) + 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) t^\mu |\xi|^{2q-\mu} J_\mu(|\xi| t) \widehat{g}(\xi).$$

La transformation inverse de Fourier, l'interversion des intégrales et le lemme 3 nous donnent le résultat du théorème 2.

Remarque. On justifie l'interversion des intégrales à l'aide de Fubini, car les intégrales qui représentent les noyaux convergent absolument (voir le lemme 3 et les comportements asymptotiques des fonctions de Bessel).

4. ÉQUATION RADIALE D'EULER-POISSON-DARBOUX.

- Preuve du théorème 3.

Soit φ une solution de l'équation (E_1) , remarquons que si $\varphi(t, x) = t^{2\mu} k_{-\mu}(t, x)$ alors

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] k_{-\mu}(t, x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1+2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right] k_{-\mu}(t, x) \quad (4.1),$$

donc il suffit de montrer que le noyau $K_\mu(t, x, x')$ vérifie l'équation (E_1) , pour cela on fait le changement des fonctions $\varphi(t, x) = x^{\nu+\mu-1} \psi(t, x)$, on obtient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\mu-1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{x^2} \right] \psi(t, x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(t, x) \quad (4.2),$$

on pose $\psi(t, x) = F(z)$ avec $z = \frac{x^2 + x'^2 - t^2}{2xx'}$ alors

$$[(1-z^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (2\mu-3)z \frac{\partial}{\partial z} + \nu^2 - (\mu-1)^2] F(z) = 0 \quad (4.3),$$

finalement, pour $F(z) = (1-z^2)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} G(z)$ on obtient l'équation de Legendre [7] P 198

$$[(1-z^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial}{\partial z} + (\nu^2 - \frac{1}{4}) - \frac{(\frac{1}{2}-\mu)^2}{1-z^2}] G(z) = 0 \quad (4.4),$$

dont deux solutions sont $P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(z)$ et $Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(z)$ où

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1(-\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1-z}{2}) \text{ pour } |z-1| < 2, \text{ et}$$

$$Q_\nu^\mu(z) = e^{i\pi\mu} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{-\nu-\mu-1} {}_2F_1(\frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2})$$

lorsque $|z| > 1$.

Pour les conditions initiales on prend $t < x$, on obtient

$$\begin{aligned} U(t, x) = & \frac{2^{-2\mu-1}\Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} t^{2\mu} \int_{x-t}^{x+t} f(x') (xx')^{\nu-\mu-1} X^{-\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\mu, X) x'^{1-2\nu} dx' \\ & + \frac{4^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)} \int_{x-t}^{x+t} g(x') (xx')^{\nu+\mu-1} X^{\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}+\mu, X) x'^{1-2\nu} dx', \end{aligned}$$

le changement des variables $x' = x + ts$ donne

$$\begin{aligned} U(t, x) = & \frac{\Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \\ & \times \int_{-1}^1 f(x+ts) x^{\nu-\frac{1}{2}} (x+ts)^{-\nu+\frac{1}{2}} (1-s^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\mu, \frac{t^2(1-s^2)}{4x(x+ts)}) ds \\ & + \frac{\Gamma(\mu)t^{2\mu}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)} \\ & \times \int_{-1}^1 g(x+ts) x^{\nu-\frac{1}{2}} (x+ts)^{-\nu+\frac{1}{2}} (1-s^2)^{\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}+\mu, \frac{t^2(1-s^2)}{4x(x+ts)}) ds, \end{aligned}$$

à la limite on obtient la première donnée initiale à savoir que

$$\int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} ds = 2^{-2\mu} B\left(\frac{1}{2}-\mu, \frac{1}{2}+\mu\right) = \frac{2^{-2\mu} [\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)]^2}{\Gamma(1-2\mu)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}.$$

De même on obtient la deuxième donnée initiale.

- Preuve du théorème 3 bis. D'après le principe de superposition, il suffit d'étudier les problèmes de Cauchy [2]

$$\Lambda_x^\nu U_l = \Lambda_t^\mu U_l, \quad \Lambda_x^\nu = \Lambda_x, \quad U_l(0, x) = x^l, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = 0 \quad (P_1).$$

$$\Lambda_x^\nu V_l = \Lambda_t^\mu V_l, \quad V_l(0, x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) = x^l \quad (P_2).$$

Pour résoudre (P_1) , on pose $U_l = x^l \phi(Z)$ avec $Z = \frac{t^2}{x^2}$ et $|Z| < 1$, on obtient l'équation

$$Z(1-Z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + [1-\mu-(\nu-l+1)Z] \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{l}{2}(\nu-\frac{l}{2})\phi = 0 \quad (4.5).$$

Or $1-\mu \notin Z$, la solution générale de (4.5) s'écrit sous la forme [6]P248

$$\phi(Z) = A {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu-\frac{l}{2}, 1-\mu, Z) + B Z^\mu {}_2F_1(\mu-\frac{l}{2}, \nu+\mu-\frac{l}{2}, 1+\mu, Z).$$

Les conditions initiales pour U_l donnent $A = 1$ et $B = 0$, et par suite on obtient

$$U_l = x^l {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu-\frac{l}{2}, 1-\mu, Z).$$

De la même manière pour résoudre (P_2) , on pose $V_l = \frac{t^{2\mu}}{2\mu} x^l \psi(Z)$

avec $Z = \frac{t^2}{x^2}$ et $|Z| < 1$, on obtient l'équation

$$Z(1-Z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + [1+\mu-(\nu-l+1)Z] \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{l}{2}(\nu-\frac{l}{2})\psi = 0 \quad (4.6),$$

$1+\mu \notin Z$, la solution générale de (4.6) s'écrit sous la forme

$$\psi(Z) = A' {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu-\frac{l}{2}, 1+\mu, Z) + B' Z^{-\mu} {}_2F_1(-\mu-\frac{l}{2}, \nu-\mu-\frac{l}{2}, 1-\mu, Z).$$

Les conditions initiales pour V_l donnent $A' = 1$ et $B' = 0$, et par suite on obtient

$$V_l = \frac{t^{2\mu}}{2\mu} x^l {}_2F_1(-\frac{l}{2}, \nu-\frac{l}{2}, 1+\mu, Z).$$

- Preuve du théorème 4. par une méthode analogue à celle procédée dans la preuve du théorème 2 on obtient

$$\widehat{U}(t, \lambda) = 2^{-\mu} \Gamma(1-\mu) t^\mu \lambda^\mu J_{-\mu}(\lambda t) \widehat{F}(\lambda) + 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) t^\mu \lambda^{-\mu} J_\mu(\lambda t) \widehat{G}(\lambda).$$

La transformation inverse de Fourier-Bessel-Hankel, l'interversion des intégrales et le lemme 4 nous donnent le résultat du théorème 4.

PROPOSITION.

$U(t, x) = x^\alpha (x^2 - t^2)^\beta F_4(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\alpha}{2} + \nu, 1 - \mu, \gamma, \frac{t^2}{x^2}, \frac{(x^2 - t^2)^2}{x^2})$
vérifie l'équation (E_2) avec $\beta = \mu + \nu - \alpha - 1$

Preuve. On rappelle d'abord que la fonction $F_4(a, b, c, d, x, y)$ vérifie le système de deux équations [8]

$$\begin{cases} y(1-y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2yz \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + [c - (a+b+1)y] \frac{\partial}{\partial y} - (a+b+1)z \frac{\partial}{\partial z} - ab = 0 & (1) \\ z(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2yz \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + [d - (a+b+1)z] \frac{\partial}{\partial z} - (a+b+1)y \frac{\partial}{\partial y} - ab = 0 & (2). \end{cases}$$

On cherche maintenant une solution de (E_2) sous la forme

$V(t, x) = x^\alpha (x^2 - t^2)^\beta W(t, x)$, on obtient que W vérifie l'équation

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1 - 2\nu + 2\alpha + 4\beta \frac{x^2}{x^2 - t^2}) x \frac{\partial W}{\partial x} = \\ x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (\frac{1-2\mu}{t} - 4\beta \frac{t}{x^2 - t^2}) x^2 \frac{\partial W}{\partial t} + \alpha(2\nu - \alpha)W \quad (4.7); \end{aligned}$$

en posant $W(t, x) = F(y, z)$ avec $y = \frac{t^2}{x^2}$ et $z = \frac{(x^2 - t^2)^2}{x^2}$ on obtient que F vérifie l'équation (1) du système.

5. APPLICATIONS ET PERSPECTIVES.

Corollaire 1 (Équation des ondes en dimension n [4]).

Pour $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$ dans le théorème 1, on retrouve la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes classique en dimension n

$$U(t, x) = b(N) \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t})^{N-1} [t^{2N-1} \int_{\{|y|=1\}} \Phi(x - ty) d\sigma(y)] +$$

$$b(N) (\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t})^{N-1} [t^{2N-1} \int_{\{|y|=1\}} \Psi(x - ty) d\sigma(y)] \text{ si } n \text{ est impair } (n = 2N + 1)$$

où $b(N) = 2^{-1} [1.3.5 \dots (2N-1)]^{-1} \pi^{-N-\frac{1}{2}} \Gamma(N + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2(2\pi)^N}$
et $d\sigma(y)$ est la mesure de surface $\{|y| = 1\}$,

$$U(t, x) = 2b(N) \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t})^{N-1} [t^{2N-1} \int_{\{|y|<1\}} \frac{\Phi(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy] +$$

$$2b(N) (\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t})^{N-1} [t^{2N-1} \int_{\{|y|<1\}} \frac{\Psi(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy] \text{ si } n \text{ est pair } (n = 2N).$$

Preuve. On distingue deux cas:

- **Cas n impair** ($n = 2N + 1$). $U(t, x) = I_1(t, x) + J_1(t, x)$,

$$I_1(t, x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^N \pi^{N+\frac{1}{2}}} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} t (\frac{\partial}{t \partial t})^N \int_{|x'-x|<t} f(x') (t^2 - |x' - x|^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} dx',$$

$$\text{et } J_1(t, x) = \frac{1}{2(2\pi)^N} (\frac{\partial}{t \partial t})^N \int_{|x'-x|<t} g(x') dx',$$

$$\begin{aligned} I_1(t, x) &= \frac{1}{2(2\pi)^N} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} t (\frac{\partial}{t \partial t})^N \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x'-x|<t} f(x') (t^2 - |x' - x|^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dx' \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^N} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial}{t \partial t})^N \int_{|x'-x|<t} f(x') dx' \end{aligned}$$

$$\text{et } (\frac{\partial}{t \partial t})^N \int_{|x'-x|<t} f(x') dx' = (\frac{\partial}{t \partial t})^{N-1} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{2N+1} \int_0^1 [\int_{|y|=1} f(x - tsy) d\sigma(y)] s^{2N} ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{et } \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{2N+1} \int_0^1 [\int_{|y|=1} f(x - tsy) d\sigma(y)] s^{2N} ds \right\} = \\
& (2N+1) t^{2N-1} \int_0^1 [\int_{|y|=1} f(x - tsy) d\sigma(y)] s^{2N} ds \\
& - t^{2N} \int_0^1 [\int_{|y|=1} f'(x - tsy) y d\sigma(y)] s^{2N+1} ds \\
& \text{et } (2N+1) t^{2N-1} \int_0^1 [\int_{|y|=1} f(x - tsy) d\sigma(y)] s^{2N} ds = \\
& t^{2N-1} \left\{ [s^{2N+1} \int_{|y|=1} f(x - tsy) d\sigma(y)]_0^1 + t \int_0^1 [\int_{|y|=1} f'(x - tsy) y d\sigma(y)] s^{2N+1} ds \right\}, \\
& \text{donc } I_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{N-1} \left\{ t^{2N-1} \int_{|y|=1} f(x - ty) d\sigma(y) \right\}, \\
& \text{et } J_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{N-1} \left\{ t^{2N-1} \int_{|y|=1} g(x - ty) d\sigma(y) \right\}.
\end{aligned}$$

- **Cas n pair** ($n = 2N$). $U(t, x) = I_2(t, x) + J_2(t, x)$,

$$\begin{aligned}
I_2(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} t \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^N \int_{|x'-x|<t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx', \\
\text{et } J_2(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^N \int_{|x'-x|<t} g(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} t \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^N \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x'-x|<t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^N \int_{|x'-x|<t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{et } \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^N \int_{|x'-x|<t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx' = \\
& \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{N-1} \int_{|x'-x|<t} f(x') \left(t^2 - |x' - x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{donc } I_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{N-1} \left\{ t^{2N-1} \int_{|y|<1} f(x - ty) \left(1 - |y|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy \right\} \\
& \text{et } J_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\frac{\partial}{t \partial t} \right)^{N-1} \left\{ t^{2N-1} \int_{|y|<1} g(x - ty) \left(1 - |y|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy \right\}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2 (Théorème 1.1 [4]).

Pour $\nu = -\alpha$ et $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$ dans le théorème 3, on retrouve la solution du problème de Cauchy pour l'équation radiale des ondes

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{+\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [f(x-t)(x-t)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(x+t)(x+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}] \text{ pour } t < x \\ \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [-\sin \pi \alpha \cdot f(t-x)(t-x)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(t+x)(t+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}] \text{ pour } x < t \end{array} \right. \\
&\text{où } K(t, x, x') = K_{\frac{1}{2}}(t, x, x') x'^{1+2\alpha} = \\
&\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ pour } 0 < x' < x-t \text{ ou } x' > x+t, \\ \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} x'^{\frac{1}{2}+\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha, 1, \frac{t^2 - (x'-x)^2}{4xx'}\right) \text{ pour } |x-t| < x' < x+t, \\ \frac{2^{-2\alpha-1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} x'^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{4xx'}{t^2 - (x'-x)^2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \\ \quad \times {}_2F_1\left(\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha + 1, \frac{4xx'}{t^2 - (x'-x)^2}\right) \text{ pour } 0 < x' < t-x. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Preuve. D'après les relations [7]P41

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}[X^{c-1} {}_2F_1(a, b, c, X)] &= (c-1)X^{c-2} {}_2F_1(a+1, b, c-1, X) \\ \text{et } \frac{d}{dY}[Y^a {}_2F_1(a, b, c, Y)] &= aY^{a-1} {}_2F_1(a+1, b, c, Y) \end{aligned} \quad , \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4^{-\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} t^{2\mu} \\ &\times \int_{|x-t|}^{x+t} f(x')(xx')^{-\alpha-\mu-1} \frac{d}{dX} [X^{\frac{1}{2}-\mu} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, \frac{3}{2}-\mu, X)] x'^{1+2\alpha} dx' \\ &+ [\int_0^{t-x} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' \text{ si } t > x] \\ &+ \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx', \quad X = \frac{1-z}{2} \end{aligned}$$

on distingue deux cas:

- **Pour $t < x$** , on obtient

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4^{-\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} t^{2\mu} x^{-\alpha-\mu-1} \\ &\times \int_{x-t}^{x+t} f(x') x'^{\alpha-\mu} X^{\frac{1}{2}-\mu} \frac{d}{dX} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, \frac{3}{2}-\mu, X) dx' \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4^{-\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(1-\mu)(\frac{1}{2}-\mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} t^{2\mu} x^{-\alpha-\mu-1} \\ &\times \int_{x-t}^{x+t} f(x') x'^{\alpha-\mu} X^{-\frac{1}{2}-\mu} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, \frac{3}{2}-\mu, X) dx' + \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx', \\ \text{alors} \\ U(t, x) &= \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{+\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-\mu)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} t^{2\mu} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{x-t}^{x+t} \frac{f(x') x'^{\alpha+\frac{1}{2}}}{x-x'} {}_2F_1(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, \frac{3}{2}-\mu, X) \frac{d}{dx'} [t^2 - (x' - x)^2]^{\frac{1}{2}-\mu} dx', \end{aligned}$$

une intégration par parties montre que la valeur de la dernière limite est

$$\frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [f(x-t)(x-t)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(x+t)(x+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}] \quad , \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{+\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' \\ &+ \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [f(x-t)(x-t)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(x+t)(x+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}]. \end{aligned}$$

- **Pour $x < t$** , le changement des variables $x' = \sqrt{t^2 - (1-z^2)x^2} + zx$, donne

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{t-x} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' \\ &- \frac{1}{2} t x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2 - (1-z^2)x^2}} \frac{d}{dz} [(1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z)] dz, \end{aligned}$$

en utilisant la relation [7] P167

$$P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\cos(\mu-\frac{1}{2})\pi} \left[\frac{\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+1-\mu)} P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(z) + \frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) \right],$$

on voit que la valeur de la dernière limite est

$$\int_{t-x}^{t+x} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' - \frac{1}{2} t x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2-(1-z^2)x^2}} \frac{d}{dz} [(1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} (\frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z))] dz,$$

soit alors

$$U(t, x) = \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{+\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' - \frac{1}{2} t x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} [\frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2-(1-z^2)x^2}} (1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} \frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z)]_{-1}^1 + \frac{1}{2} t x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{d}{dz} [\frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2-(1-z^2)x^2}}] (1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} \frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) dz,$$

d'après le comportement asymptotique de la fonction Q_ν^μ [7] P196 – 197

$$Q_\nu^\mu(z) \approx 2^{-1-\frac{1}{2}\mu} \Gamma(-\mu) \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1-z)^{\frac{\mu}{2}} \text{ pour } z \approx 1, \mu < 0,$$

$$Q_\nu^\mu(z) \approx 2^{-1-\frac{1}{2}\mu} \Gamma(-\mu) \cos[\pi(\nu+\mu)] \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1+z)^{\frac{\mu}{2}} \text{ pour } z \approx -1, \mu < 0,$$

$$\text{on a } [\frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2-(1-z^2)x^2}} (1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} \frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z)]_{-1}^1 = \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [-\sin \pi \alpha \cdot f(t-x)(t-x)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(t+x)(t+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}];$$

et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{\mu \rightarrow \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{d}{dz} [\frac{f(x') x'^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{t^2-(1-z^2)x^2}}] (1-z^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}} \frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) dz = 0$$

à savoir que $\frac{2}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-\mu)} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) = P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(z) - \frac{1}{\cos(\mu-\frac{1}{2})\pi} \frac{\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+1-\mu)} P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(z)$ d'où

$$U(t, x) = \int_0^{+\infty} g(x') K(t, x, x') dx' + \int_0^{+\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial t} K(t, x, x') dx' + \frac{1}{2} x^{-\alpha-\frac{1}{2}} [-\sin \pi \alpha \cdot f(t-x)(t-x)^{\frac{1}{2}+\alpha} + f(t+x)(t+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}].$$

Corollaire 3 (Théorème 2.1.1 [2]).

Pour $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{k+1}{2}$ dans le théorème 3 bis, on retrouve la solution exacte de l'équation homogène d'Euler-Poisson-Darboux

$$U(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l U_l + \sum_{l=0}^{\infty} b_l V_l$$

où $U_l = x^l {}_2F_1(\frac{-l}{2}, \frac{k+1-l}{2}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{x^2})$ et $V_l = t x^l {}_2F_1(\frac{-l}{2}, \frac{k+1-l}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{x^2})$.

Exemples.

$$1. \text{ Le problème } \begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{x} \frac{\partial}{\partial x}) U(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, x) \\ U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = x \end{cases}$$

admet la solution unique $U(t, x) = t \sqrt{x^2 - t^2}$.

$$2. \text{ Le problème } \begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}) U(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, x) \\ U(0, x) = x, \quad U_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

admet la solution unique $U(t, x) = \sqrt{x^2 - t^2} + t \arcsin \frac{t}{x}$.

En perspective, on étudiera les équations d'Euler-Poisson-Darboux à conditions modifiées dans les espaces hyperboliques et elliptiques.

6. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1]- J. Barros-Neto: Hypergeometric functions and the Tricomi operator, arXiv:math/0310480v1 [math.AP] 30 Oct 2003.
- [2]- A.Bentrad: Exact solutions for a different version of the monhomogeneous E-P-D equation.Complex variables and elliptic equations,vol.51.No.3 March 2006,243-253.
- [3]- D.W.Bresters: On the equation of Euler-Poisson-Darboux.Siam J.Math.Anal.1973 no.1, 31-41.
- [4]- L.Colzani: Radial solutions to the wave equation. Annali di matematica 181, 25-54 (2002).
- [5]- I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: Table of Integrals, Series, and Products; sixth edition. Academic press 2000.
- [6]- N.N.Lebedev: Special functions And their applications. Dover Publications,Inc New york 1972.
- [7]- W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni: Formulas and Theorems for the special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [8]- Raimundas Vidunas: Specialization of Appell's functions to univariate hypergeometric functions. J. Math. Anal. Appl. 355 (2009) 145-163.
- [9]- A. Weinstein: On the wave equation and the equation of Euler-Poisson, proc. Symposia Appl. Math, vol. 5, McGraw-Hill, New York, 1954, pp. 137-147.

Université Gaston Berger de Saint-Louis B.P: 234. Sénégal.

E-mail adresse: cheikh976@yahoo.fr.

Université de Nouakchott Faculté des sciences et techniques B.P: 5026. Mauritanie.

E-mail adresse: mohamedvall.ouldmoustapha230@gmail.com.